

**CONTROLE 2 (durée : 1h30)**

**Exercice 1 :**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $K$ ,  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire et  $a_1, \dots, a_p$  des vecteurs de  $E$ . Montrer que :

1.  $(f(a_1), \dots, f(a_p))$  est liée et  $f$  est injective  $\Rightarrow (a_1, \dots, a_p)$  est liée.
2.  $(f(a_1), \dots, f(a_p))$  est libre  $\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_p)$  est libre et  
 $\text{Vect}\{a_1, \dots, a_p\} \cap \ker(f) = \{0_E\}$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  et on considère le déterminant d'ordre  $n \geq 2$  :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & 1 \end{vmatrix},$$

- 1) Calculer  $D_2$  et  $D_3$ .
- 2) Trouver une relation de récurrence entre  $D_n$  et  $D_{n-1}$ .
- 3) En déduire la valeur de  $D_n$ .

### Exercice 3 :

Soit l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^3$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$

et  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice d'un endomorphisme  $f$  de  $E$  dans la base

$\mathcal{B}$ .

1. Montrer que la famille  $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , avec  $e'_1 = (1, 0, -1)$ ,

$e'_2 = (0, 1, -1)$ ,  $e'_3 = (0, 1, 1)$ , est une base de  $E$ .

2. Ecrire la matrice  $D$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

3. Déterminer la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  et calculer  $P^{-1}$ .

Pour toute matrice carrée  $M$  d'ordre 3, et pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$T_n(M) = I_3 + \frac{1}{1!} M + \frac{1}{2!} M^2 + \cdots + \frac{1}{n!} M^n.$$

4. Montrer que  $T_n(A) = PT_n(D)P^{-1}$ .

5. Calculer  $T_n(D)$  sous forme matricielle, puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(D)$ .

6. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(A)$ .

### Indications :

• On rappelle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n\right) = e^x$ .

• Si  $M_n = \left(a_{ij}^{(n)}\right)$  est une suite de matrices dépendant de  $n$ , on définit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$  comme étant la matrice  $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{ij}^{(n)}\right)$ .

• La matrice  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(M)$  s'appelle l'exponentielle de la matrice  $M$ .





ETU SUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..